

هندسه ۱ (پایه دهم)

فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

مدرس:

سیدابوذر حسینی

* قضیه‌های شرطی

هر جمله‌ی شرطی که درستی آن به اثبات نیاز دارد، قضیه‌ی شرطی نامیده می‌شود. صورت کلی قضیه‌های شرطی:

اگر: «فرض قضیه»، آنگاه: «حکم قضیه»

مثال: اگر $x > 5$ باشد، آنگاه $4x > 20$ است.

مثال: اگر در مثلث ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$ است. (قضیه‌ی فیثاغورس)

عکس قضیه‌ی شرطی: اگر در قضیه‌ی شرطی، جای فرض و حکم را عوض کنیم، عکس قضیه‌ی شرطی به وجود می‌آید. عکس قضیه‌ی شرطی، خود می‌تواند یک قضیه‌ی شرطی باشد.

* اگر یک قضیه‌ی شرطی و عکس آن هر دو برقرار باشند، قضیه را دو شرطی می‌نامیم.

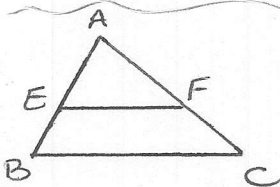
صورت کلی قضیه‌های دو شرطی:

«فرض قضیه» اگر و تنها اگر «حکم قضیه»

مثال: قضیه‌ی فیثاغورس و تالس را به صورت شرطی، عکس شرطی و دو شرطی بنویسید.
شرطی: اگر مثلث قائم الزاویه باشد، آنگاه مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیند است.

عکس شرطی: اگر در مثلث مربع یک ضلع برابر مجموع مربعات دو ضلع دیند باشد، آنگاه مثلث قائم الزاویه است.

دو شرطی: مثلث قائم الزاویه است اگر و تنها اگر مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیند باشد.



شرطی: در مثلث مقابل، اگر $EF \parallel BC$ باشد، آنگاه $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$ است.

عکس شرطی: در مثلث مقابل، اگر $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$ باشد، آنگاه $EF \parallel BC$ است.

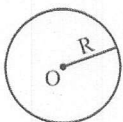
دو شرطی: در مثلث مقابل، اگر $EF \parallel BC$ است اگر و تنها اگر $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$ باشد.

* مکان هندسی

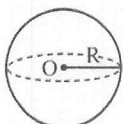
تعریف: مجموعه‌ی نقاطی از صفحه یا فضا که دارای یک ویژگی مشترک هستند را مکان هندسی می‌نامیم، یعنی هر نقطه در این مجموعه دارای این ویژگی است و هر نقطه که این ویژگی را دارد، عضو این مجموعه است.

* طبق تعریف فوق واضح است که مسائل مکان هندسی، قضایایی دو شرطی هستند.

چند مثال ساده از مکان هندسی:



۱- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه‌ی ثابت، به یک فاصله‌ی ثابت می‌باشند، یک دایره است که نقطه‌ی ثابت، مرکز آن و فاصله‌ی ثابت، شعاع آن است.



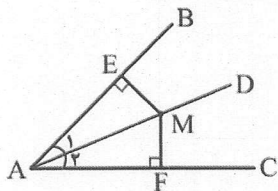
۲- مکان فوق در فضا (یعنی مکان هندسی نقاطی از فضا که از نقطه‌ی O به فاصله‌ی R می‌باشند)، یک کره به مرکز O و شعاع R است.



* اجزای فرعی مثلث (نیمساز، عمود منصف، ارتفاع، میانه)

(۱) نیمساز به عنوان مکان هندسی:

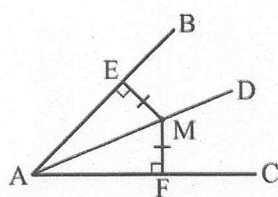
اثبات اول: اگر نقطه‌ای مانند M روی نیمساز زاویه‌ی A باشد، آنگاه از دو ضلع زاویه‌ی A به یک فاصله است.



$$\begin{cases} AM = AM & \text{وتر مشترک} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 & \text{طبق فرض} \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle AEM \cong \triangle AFM$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای تقارن}} ME = MF$$

اثبات دوم: اگر نقطه‌ای مانند M از دو ضلع زاویه‌ی A به یک فاصله باشد، آنگاه روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد.



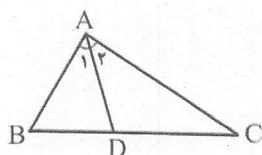
$$\begin{cases} AM = AM & \text{وتر مشترک} \\ ME = MF & \text{طبق فرض} \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle AEM \cong \triangle AFM$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای تقارن}} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \rightarrow \text{AM نیمساز } \hat{A}$$

نتیجه: از دو اثبات بالا نتیجه می‌شود:

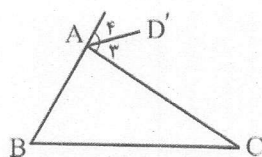
«نیمساز یک زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو ضلع زاویه، به یک فاصله‌اند.»

$$AD \text{ نیمساز } \hat{A} \Leftrightarrow ME = MF$$



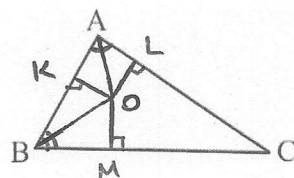
نیمساز داخلی مثلث: نیمساز داخلی در مثلث، پاره‌خطی است که زاویه‌ی مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. ابتدای این پاره‌خط، رأس زاویه و انتهای آن بر روی ضلع مقابل زاویه می‌باشد.

$$AD \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$$



نیمساز خارجی مثلث: نیمساز خارجی در مثلث، نیم‌خطی است که زاویه‌ی خارجی مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

$$AD' \Rightarrow \hat{A}_3 = \hat{A}_4 = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$$



قضیه: سه نیمساز داخلی هر مثلث هم‌رسانند (در یک نقطه متقاطع‌اند).
پرهان: نیمساز دو زاویه‌ی A و B را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در O قطع کنند.
سپس از O به سه ضلع عمود می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{A} \text{ روی نیمساز } \hat{A} \Rightarrow OK = OL \\ \hat{B} \text{ " " } \hat{B} \Rightarrow OK = OM \end{aligned} \Rightarrow OL = OM$$

O روی نیمساز \hat{C} است \Rightarrow سه نیمساز در O هم‌رسانند.

نتیجه: محل هم‌رسانی نیمسازهای داخلی هر مثلث، همواره داخل مثلث قرار دارد و از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

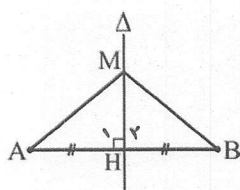
$$OK = OL = OM$$

(مرکز دایره‌ی محاطی)



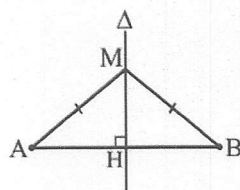
۲) عمودمنصف به عنوان مکان هندسی:

اثبات اول: اگر نقطه‌ای مانند M روی عمودمنصف پاره خط AB باشد، آنگاه از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است.



$$\left\{ \begin{array}{l} AH=BH \text{ (نقطه میانه)} \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \\ MH=MH \text{ (مشترک)} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{قضیه ۱}} \triangle AMH \cong \triangle BMH \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} MA=MB$$

اثبات دوم: اگر نقطه‌ای مانند M از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشد، آنگاه روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد.



$$\left\{ \begin{array}{l} MA=MB \text{ (فرض)} \\ MH=MH \text{ (مشترک)} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{قضیه ۱}} \triangle AMH \cong \triangle BMH$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} AH=BH \text{ (۲)}$$

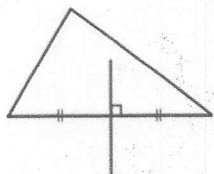
$$\text{M روی عمودمنصف} \rightarrow MH \perp AB \text{ و } H \text{ میانه } AB \Rightarrow \text{(۱) و (۲)}$$

نتیجه: از دو اثبات بالا نتیجه می‌شود:

«عمودمنصف یک پاره خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله‌اند.»

$$AB \text{ عمودمنصف } M \Leftrightarrow MA=MB$$

عمودمنصف در مثلث: عمودمنصف در مثلث، خطی است که از وسط یک ضلع بر آن عمود می‌شود.



قضیه: عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث هم‌مس‌اند.

پرهان: ابتدا دو عمودمنصف اضلاع AB و AC را رسم کرده تا یکدیگر را در O قطع کنند، سپس از O به رأس وصل می‌کنیم:

$$O \text{ روی عمودمنصف } AB \rightarrow OA=OB$$

$$AC \text{ " " } O \rightarrow OA=OC$$

$$\rightarrow OB=OC$$

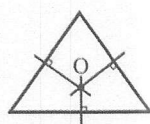
O روی عمودمنصف BC \leftarrow سه عمودمنصف در O هم‌مس‌اند.

نکته ۱: محل هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

$$OA=OB=OC$$

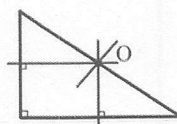
(مرکز دایره محاطی)

نکته ۲: محل هم‌رسی عمودمنصف‌ها، وضعیت خاصی نسبت به مثلث ندارد:



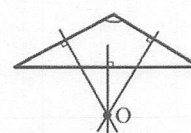
مثلث با زوایای حاده

محل هم‌رسی، داخل مثلث



مثلث قائم‌الزاویه

محل هم‌رسی، وسط وتر

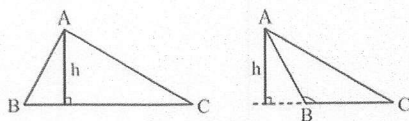


مثلث با زاویه منفرجه

محل هم‌رسی، خارج مثلث

(۳) ارتفاع:

تعریف: ارتفاع در مثلث، پاره‌خطی است که از یک رأس بر ضلع مقابل آن رأس یا امتداد آن عمود می‌شود.



قضیه: ارتفاع‌های هر مثلث هم‌رس‌اند.

برهان: از هر رأس مثلث ABC، خطی به موازات ضلع مقابل آن رسم می‌کنیم تا مثلث MNP به وجود آید.

$$ABCN: \begin{cases} AN \parallel BC \\ AB \parallel NC \end{cases} \rightarrow ABCN \text{ متوازی الاضلاع} \rightarrow AN = BC$$

$$AMBC: \begin{cases} AM \parallel BC \\ AC \parallel MB \end{cases} \rightarrow AMBC \text{ متوازی الاضلاع} \rightarrow AM = BC$$

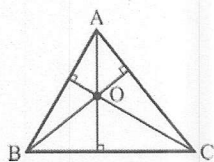
①. AH منصف MN است.

$$\begin{cases} MN \parallel BC \\ AH \perp BC \end{cases} \rightarrow AH \perp MN \rightarrow \text{②. AH عمود بر MN است}$$

① و ② \rightarrow AH عمود منصف MN است.

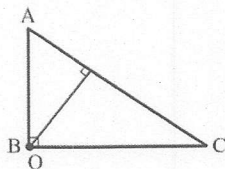
به طور مشابه ثابت می‌شود که BK عمود منصف MP و CL عمود منصف NP است و چون ثابت کردیم سه محور منصف هر مثلث هم‌رسند پس ارتفاع‌های مثلث ABC نیز هم‌رس‌اند.

نکته: محل هم‌رسی ارتفاع‌ها، مکان خاصی نسبت به مثلث ندارد:



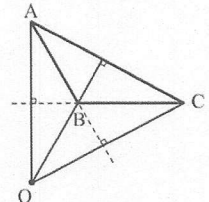
مثلث با زوایای حاده

داخل مثلث



مثلث قائم‌الزاویه

روی رأس قائمه



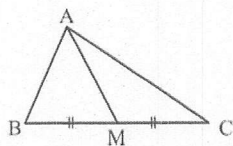
مثلث با زاویه‌ی منفرجه

خارج مثلث

(۴) میانه

میانه در مثلث، پاره‌خطی است که یک رأس را به وسط ضلع مقابل آن رأس وصل می‌کند.

$$\text{میانه } AM \Rightarrow BM = CM = \frac{BC}{2}$$



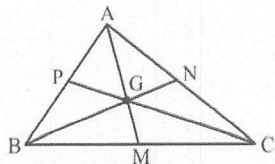
قضیه: میانه‌های هر مثلث هم‌رس‌اند.

نکته ۱: محل هم‌رسی میانه‌های هر مثلث دلخواه، همواره داخل مثلث قرار دارد.

نکته ۲: محل هم‌رسی میانه‌های مثلث، مرکز ثقل مثلث نامیده می‌شود و معمولاً با حرف G نام‌گذاری می‌شود.

نکته ۳: مرکز ثقل مثلث، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.

$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = 2$$





مدرس: سیدابوذر حسینی

فصل اول (تربیه‌های هندسی و استدلال)

هندسه ۱ (پایه دهم)

مثال: مکان هندسی نقاطی از داخل مثلث که از دو ضلع AB و AC به یک فاصله باشند، کدام است؟

- (۱) میانه‌ی BC (۲) عمودمنصف BC

- (۳) نیمساز \hat{B} (۴) نیمساز \hat{A}

مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه‌ی مثلث که از دو رأس B و C به یک فاصله باشند، کدام است؟

- (۱) نیمساز \hat{A} (۲) میانه‌ی BC

- (۳) عمودمنصف BC (۴) ارتفاع وارد بر BC

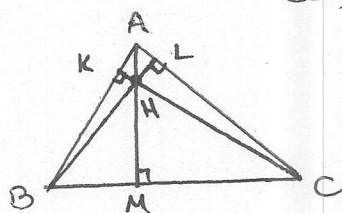
مثال: چند نقطه در صفحه‌ی مثلث، از رأس‌های مثلث به یک فاصله است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

تقرین:

۱- نقطه‌ی H محل هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث ABC می‌باشد. نقطه‌ی A برای مثلث BHC چه نقطه‌ای است؟

- (۱) محل هم‌رسی ارتفاع‌ها در مثلث BHC، ارتفاع‌ها عبارتند از HM، BK و CL (۲) مرکز ثقل (۳) محل هم‌رسی عمودمنصف‌ها (۴) محل هم‌رسی نیمسازها



۲- مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. فاصله‌ی نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌ها از نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع برابر کدام است؟

(۱) $\frac{AB}{2}$

(۲) $\frac{AC}{2}$

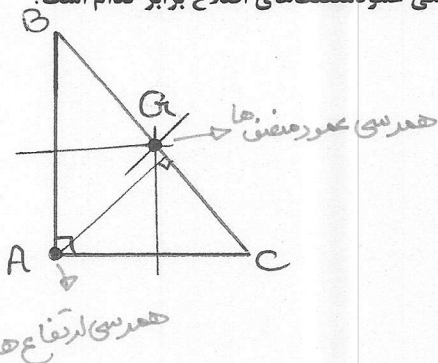
(۳) $\frac{BC}{2}$

(۴) صفر

طول AG در نظر سؤال است:

$$AG = \frac{BC}{2}$$

میانه‌ی وارد بر وتر



روش کلی یافتن مکان هندسی:

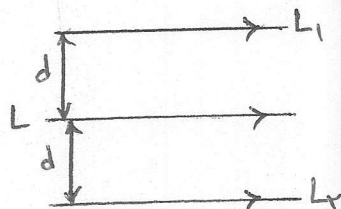
گام اول: به اندازه‌ی کافی نقطه‌هایی را که در ویژگی داده شده صدق می‌کنند، می‌یابیم.

گام دوم: این نقطه‌ها را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا تصویری شهودی از مکان هندسی موردنظر پیدا کنیم.

گام سوم: مکان هندسی را توصیف می‌کنیم.

مثال‌هایی از مکان هندسی:

مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط داده شده L به فاصله‌ی مشخص d می‌باشند، چیست؟



همان موردنظر، دو خط به موازات L و در دو طرف آن، به فاصله‌ی d

از L می‌باشد. (خط‌های L_1 و L_2)

مثال: مکان فوق در فضا چه می‌شود؟

مکان فوق در فضا، استوانه‌ای است که خط L محور آن و d شعاع

قاعده‌ی آن است.

مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی d و d' به یک فاصله‌اند، چیست؟



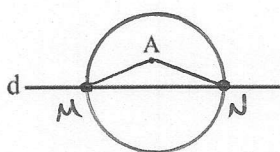
همان موردنظر، خطی است مانند L ، موازی d و d' و در وسط d و d'

مثال: مکان فوق در فضا چه می‌شود؟

مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو صفحه موازی P و P' به یک فاصله‌اند، صفحه‌ای است موازی P و P' و در وسط آن‌ها.

نکته: برخی مسائل مکان هندسی به صورت ترکیبی بوده و جواب مسأله از فصل مشترک دو یا چند مکان هندسی مختلف به دست می‌آید.

مثال: در شکل مقابل، نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از نقطه‌ی A باشند. مسأله چند جواب دارد؟



همان هندسی نقاطی که به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از نقطه‌ی A می‌باشند، دایره‌ای

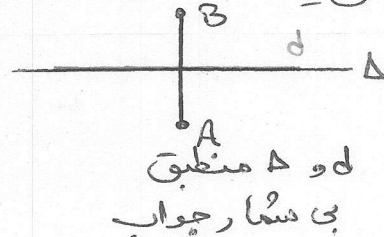
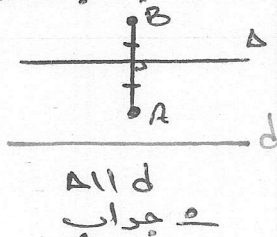
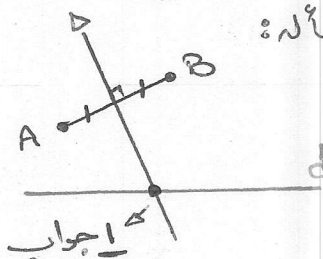
به مرکز A و شعاع ۲ است. تقاطع این دایره با خط d می‌شود جواب مسأله

یعنی نقاط M و N .

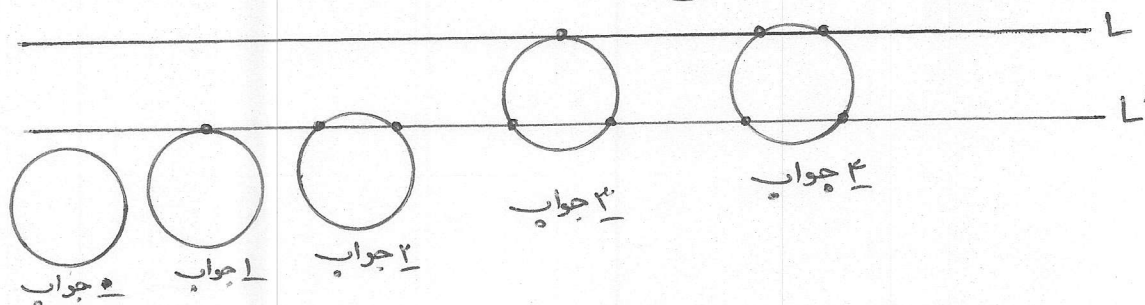
مثال: دو نقطه‌ی A و B و خط d در یک صفحه واقع‌اند. نقطه‌ای روی خط d بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد. آیا مسأله

همواره جواب دارد؟ همان هندسی نقاطی که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله‌اند، محوور منصف AB است.

حال، تقاطع این خط محوور منصف (Δ) با خط d می‌شود جواب‌های مسأله:

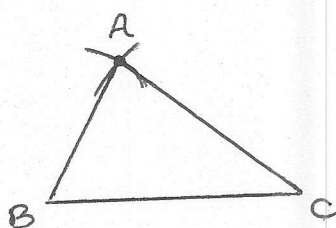


مثال: دایره‌ی (C) و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی دایره‌ی (C) تعیین کنید که از خط Δ به فاصله‌ی معلوم d باشد. مسأله چند جواب دارد؟ همان هندسی نقاشی که از خط Δ به فاصله‌ی معلوم d می‌باشند، دو خط موازی Δ و Δ' در طرفین آن است (L و L'). حال، تقاطع دایره‌ی (C) با L و L' می‌شود جوابهای مسأله



مثال: مثلثی به اضلاع ۴ و ۵ و ۶ رسم کنید.

ابتدا با خطی به طول $BC=6$ رسم می‌کنیم. حال برای یافتن رأس سوم مثلث یعنی A دو کمان، یکی به شعاع ۵ و دیگری به شعاع ۴ می‌زنیم. این دو کمان یکدیگر را در A قطع می‌کنند. آنگاه از A به B و C وصل می‌کنیم، مثلث رسم می‌شود.



نکته: شرط این که مثلثی به اضلاع a و b و c را بتوان رسم کرد این است که:

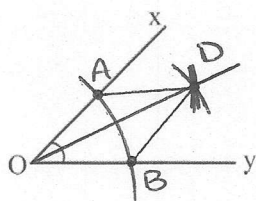
$$\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ a+c>b \end{cases}$$

قضیه نامساوی مثلث

* ترسیم های هندسی با خط کش و پرگار

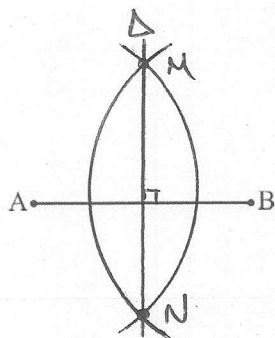
روش (رسم نیمساز یک زاویه):

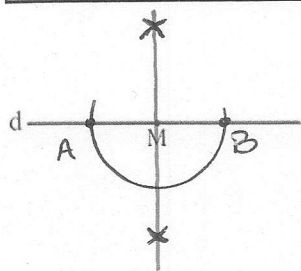
ابتدا کمانی با شعاع دلخواه رسم می‌کنیم تا Ox و Oy را در نقاط A و B قطع کند. سپس به مرکز A و B دو شعاع های یکسان به شعاع بسی از نصف AB، دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در D قطع کنند. OD نیمساز $\angle O$ است.



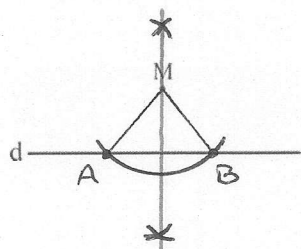
روش (رسم عمود منصف یک پاره‌فا):

دو دایره ی پرگار را بسی از نصف AB باز کرده و دو کمان یکسان به مرکزهای A و B می‌زنیم تا یکدیگر را در M و N قطع کنند. MN عمود منصف AB است.

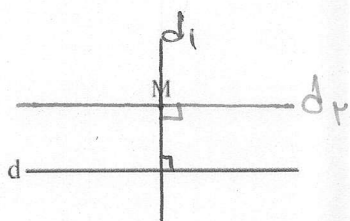




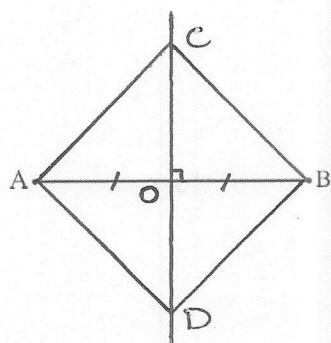
رسم فطی عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن:
ابتدا به مرکز M و شعاع دلخواه کمانی می‌زنیم تا خط d را در A و B قطع کند. حال آن عمود منصف AB را رسم کنیم، خطی داریم که از M می‌گذرد و بر d عمود است.



رسم فطی عمود بر یک خط، از نقطه‌ای خارج آن:
ما یک قوسیت قبل، ابتدا به مرکز M و شعاع دلخواه که خط d را در ۲ نقطه قطع کند، کمانی می‌زنیم. حال آن عمود منصف AB به رجوع آمده را رسم کنیم، خطی خواهیم داشت که از M می‌گذرد و بر d عمود است.



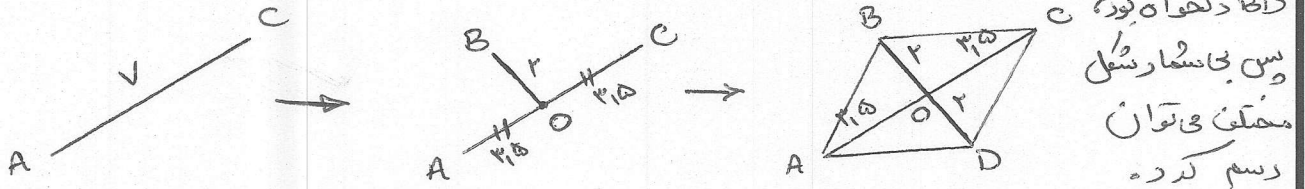
رسم فطی موازی با یک خط، از نقطه‌ای خارج آن:
① از نقطه M ، خط $d1$ را عمود بر d رسم می‌کنیم.
② از نقطه M ، خط $d2$ را عمود بر $d1$ رسم می‌کنیم.
خط $d2$ با d موازی است (زیرا هر دو خط بر $d1$ عمود اند)، پس $d2$ جواب مسأله است.



رسم مربعی که طول قطر آن داده شده است:
ابتدا عمود منصف AB را رسم کرده و نقطه تقاطع آن با AB را O می‌نامیم. به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمود منصف AB را در C و D قطع کند. آن از C و D به A و B وصل کنیم، مربع $ACBD$ تشکیل می‌شود.

تمرین (صفحہ ۱۶ کتاب) :

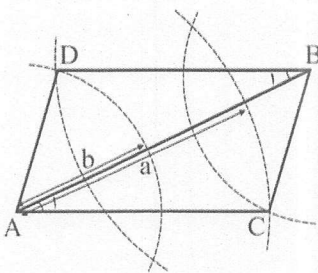
۱- می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. متوازی‌الاضلاع رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟
ابتدا به خط AC به طول ۷ را رسم کرده و وسط آن را O می‌نامیم. حال از نقطه O دو راستای عمود بر راستای AC به اندازه ۲ به طرفین رسم می‌کنیم تا نقطه‌ی B به دست آید. به اندازه ۲ رسم شده را از سمت دیگر به اندازه ۲ امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی D به دست آید و شکل کامل شود. چون راستای



۲- می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطره‌ایش با هم برابر و منصف هم باشند، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطرش ۶ سانتی‌متر باشد.

روسی رسم ما نند سوال ۱

۳- پاره خط AB داده شده است. دهانه‌ی پرگار را یک بار به اندازه‌ی a و بار دیگر به اندازه‌ی b باز می‌کنیم و از نقطه‌ی A دو کمان می‌زنیم (به طوری که مجموع a و b از اندازه‌ی AB بزرگ‌تر باشد). سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این بار از نقطه‌ی B می‌زنیم و مانند شکل، دو نقطه از نقاط برخورد را C و D می‌نامیم. چهارضلعی ACBD چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟



(راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث‌های ABC و ABD و زوایای A_1 و B_1 نسبت به هم چگونه‌اند)

متواری الاصلام است .

رأس D روی گمانی به مرکز A و شعاع a است و $AD=a$

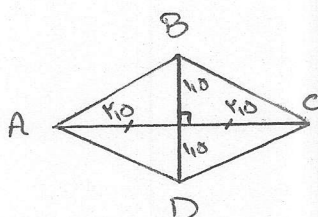
$$BC=a \quad \leftarrow \quad a \quad \leftarrow \quad B \quad \leftarrow \quad \leftarrow \quad C$$
$$BD = b \quad \leftarrow \quad " \quad b \quad " \quad B \quad " \quad " \quad " \quad D \quad "$$
$$AC = b \leftarrow " b " A " \sim \dots$$
$$\rightarrow \begin{cases} AD = BC = a \\ BD = AC = b \\ AB = AB \end{cases} \xrightarrow{\text{S.S.S}} \triangle ABD \cong \triangle ABC \xrightarrow{\text{اجزاءات}} \hat{B}_1 = \hat{A}_1$$

$AC \parallel BD$ متوازی الاضلاع \rightarrow $BD \parallel AC$ عکس قضیہ خطوط متوازی پر
 $AD \parallel BC$ یہ ہمیں ترتیب ثابت کی ضرور

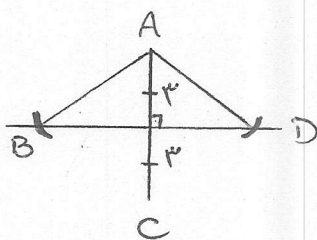


۴- متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.
دقیقاً روشی رسم صورت سؤال قبل.

۵- می‌دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید:



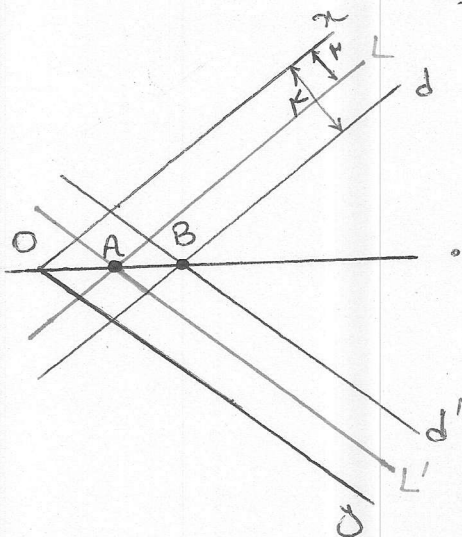
الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.
پاره خط AC به طول ۵ را رسم می‌کنیم و روی عمودمنصف آن به اندازه ۱۱۵ در دو طرف امتداد می‌دهیم تا نقاط B و D به دست آوریم.



ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.
ابتدا پاره خط AC به طول ۶ را رسم می‌کنیم. E وسط AC ، عمودمنصف AC را رسم می‌کنیم. از نقطه E به اندازه ۵ کمان می‌زنیم تا عمودمنصف AC را در دو نقطه B و D قطع کند و شکل کامل شود.

۶- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید،

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصله‌ی آن از هر ضلع زاویه‌ی مورد نظر ۲ واحد باشد.
خطوطی به موازات دو ضلع زاویه و به فاصله‌ی ۲ واحد از آن‌ها رسم می‌کنیم.
محل تقاطع آن‌ها پاسخ مسأله است. (L و L')



ب) نقطه‌ای بیابید که فاصله‌ی آن از هر ضلع زاویه‌ی مورد نظر ۴ واحد باشد.
خطوطی به موازات دو ضلع زاویه و به فاصله‌ی ۴ واحد از آن‌ها رسم می‌کنیم.
محل تقاطع آن‌ها پاسخ مسأله است. (d و d')

پ) با استفاده از الف) و ب) نیمساز زاویه‌ی مورد نظر را رسم کنید.
خطی که از دو نقطه‌ی به دست آمده در قسمت الف) و ب) می‌گذرد، زاویه را نصف می‌کند. (نقاط A و B)





۷- وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
 AB وتر دایره است. پس A و B روی محیط دایره‌اند. لذا فاصله‌ی آنها تا مرکز دایره برابر است. $(OA = OB)$. بنابراین طبق عکس خاصیت عمودمنصف، O روی عمودمنصف AB قرار دارد.

۸- چگونه می‌توان مرکز یک دایره را مشخص کرد؟
 طبق مسأله‌ی قبل، آنگاه دو وتر از دایره را مشخص کرده و عمودمنصف‌های آنها را رسم کنیم، این دو عمودمنصف یکدیگر را در مرکز دایره قطع خواهند کرد.





* استدلال در هندسه

۱- استدلال استقرایی: روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات و نتایج.

۲- استدلال استنتاجی: روش نتیجه گیری کلی بر مبنای حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

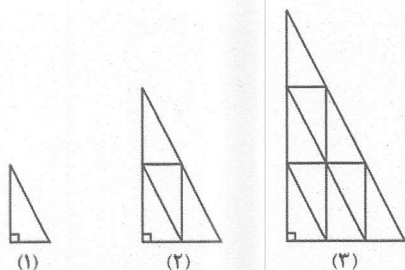
مثال: در شکل‌های زیر، تمام مثلث‌های کوچک با یکدیگر هم‌نهشت‌اند.

الف) با توجه به شماره شکل‌ها، جدول را کامل کنید.

ب) در شکل پانصدم چند مثلث کوچک جا می‌گیرد؟

پ) حدس شما در حالت کلی چیست؟

ت) آیا می‌توانید درستی حدس خود را برای شکل هزارم توجیه کنید؟



شماره شکل	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(n)
تعداد مثلث‌های کوچک						

مثال فوق نمونه‌ای از استدلال استقرایی بود. همان‌طور که مشاهده شد، در این نوع استدلال نمی‌توان به قطعیت در مورد درستی حکم در حالت کلی نظر داد. اگر حکمی همواره درست نباشد، پس حالت استثنایی وجود دارد که کلیت آن را نقض می‌کند. به این حالت، مثال نقض گفته می‌شود.

* مثال نقض

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری یا یک حدس کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود.

مثال نقض: زوایای ۳۰° و ۱۵۰° ← اگر دو زاویه مکمل باشند، آنگاه هر دو قائمه هستند.

مجموع دو عدد گنگ، همواره گنگ است. ← مثال نقض: $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$

* اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف

ابتدا دو تعریف:

گزاره: گزاره یک جمله‌ی خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد.

نقیض یک گزاره: گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

اثبات غیرمستقیم یکی از روش‌های استدلال در هندسه است. این روش بر این اصل استوار است که از بین یک حکم هندسی و نقیض آن، تنها یکی از آن‌ها درست است.

در برهان خلف اثبات می‌کنیم که خلاف (نقیض) حکم نادرست است.

برای استفاده از برهان خلف گام‌های زیر را برمی‌داریم:

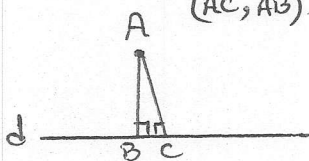
گام ۱: فرض می‌کنیم نقیض حکم درست است.

گام ۲: نشان می‌دهیم که نقیض حکم با حقایق دانسته شده یا فرض اولیه در تناقض است.

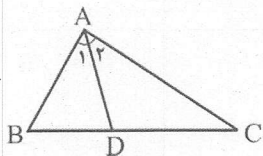
گام ۳: با نادرست بودن نقیض حکم، نتیجه می‌گیریم که حکم درست است.



مثال: ثابت کنید از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.
 گام ۱: نقیض حکم درست است یعنی از نقطه A پس از یک عمودی توان بر خط (AB, AC) رسم کرد.
 گام ۲: یعنی مجموع زوایا هشتاد و نه درجه است $\rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$
 $\hat{A} + 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \rightarrow \hat{A} = 0^\circ$ که غیر ممکن است X
 گام ۳: پس نقیض حکم نادرست بوده و درستی حکم اثبات می‌شود.



مثال: در مثلث ABC شکل مقابل، AD نیمساز زاویه A است. اگر $BD \neq CD$ باشد، ثابت کنید $AB \neq AC$ است.



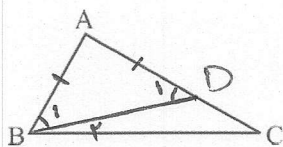
نقیض حکم: $AB = AC$

$$\begin{cases} AB = AC \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AD = AD \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABD \cong \triangle ACD \xrightarrow{\text{اخری تطبیق}} BD = CD \quad \text{خلا فرض خلاف}$$

پس نقیض حکم نادرست بوده و درستی حکم اثبات می‌شود.

* قضایایی از استدلال استنتاجی

قضیه (نامساوی اضلاع و زوایا): اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.



برهان: روی ضلع AC به اندازه AB جدا کرده، از D به B وصل می‌کنیم: $AD = AB$ جدا کرده، از D به B وصل می‌کنیم.

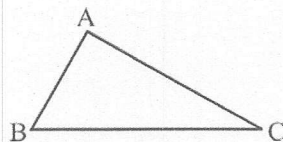
$$\triangle ABD: AB = AD \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \rightarrow \hat{B}_1 > \hat{C} \rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

$$\triangle BDC: \hat{D}_1 = \hat{B}_2 + \hat{C} \xrightarrow{\text{برتری است}} \hat{D}_1 > \hat{C}$$

$$\xrightarrow{\text{برتری است که}} \underbrace{\hat{B}_1 + \hat{B}_2}_B > \hat{C} \rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

عکس قضیه‌ی فوق نیز برقرار است:

قضیه: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر. اثبات با برهان خلف:



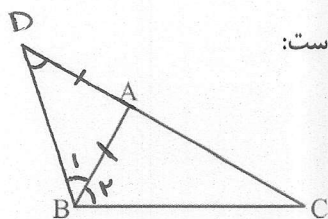
$$\hat{B} > \hat{C} \quad AC > AB \quad \text{که معادل است با} \quad AC < AB \quad \text{نقیض حکم}$$

$$\text{حالات} \rightarrow \begin{cases} ① AC = AB \rightarrow \hat{B} = \hat{C} \quad \text{خلا فرض} \\ ② AC < AB \xrightarrow{\text{طبق خواص قضیه}} \hat{B} < \hat{C} \quad \text{خلا فرض} \end{cases}$$

پس نقیض حکم نادرست بوده و درستی حکم اثبات می‌شود.

پس دو قضیه‌ی فوق را می‌توان به صورت دوشرطی به شکل زیر نوشت:

"در مثلث ABC، نامساوی $AC > AB$ برقرار است اگر و تنها اگر $\hat{B} > \hat{C}$ "



قضیه نامساوی مثلث: در هر مثلث، مجموع طول هر دو ضلع، از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است:

$$\text{حکم: } \begin{cases} AB + AC > BC \\ AB + BC > AC \\ AC + BC > AB \end{cases}$$

کل از نامساوی‌ها را اثبات می‌کنیم، ۲-ای دلیل مشابه همین اثبات می‌شود.

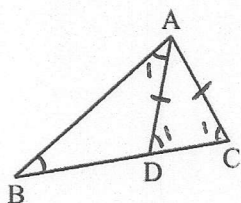
پرهان: روی امتداد AC به اندازهی $AD = AB$ جدا کرده، از D به B

وصل می‌کنیم:

$$\triangle ADB: AD = AB \rightarrow \hat{D} = \hat{B}_1 \xrightarrow{\text{ببینی است که}} \hat{D} < \underbrace{(\hat{B}_1 + \hat{B}_2)}_{\hat{B}}$$

$$\rightarrow \hat{D} < \hat{B} \xrightarrow[\text{نامساوی اضلاع و زوایا}]{\text{طبق عکس قضیه}} \underbrace{DC}_{AD + AC} > BC \Rightarrow AB + AC > BC$$

مثال: در شکل مقابل، $AC = AD$ می‌باشد. ثابت کنید: $AB > AC$



$$\triangle ACD: AD = AC \rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \xrightarrow{\text{ببینی است که}} \hat{C}_1 > \hat{B}$$

$$\triangle ADB: \hat{D}_1 = \hat{B} + \hat{A}_1 \xrightarrow{\text{ببینی است که}} \hat{D}_1 > \hat{B}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس قضیه نامساوی}} \triangle ABC: AB > AC$$

مثال: اعداد $2a+1$ و ۵ و ۱۲ اضلاع مثلثی می‌باشند. حدود a را بیابید.

$$\begin{cases} 2a+1+12 > 5 \rightarrow 2a > -8 \rightarrow a > -4 \\ 2a+1+5 > 12 \rightarrow 2a > 6 \rightarrow a > 3 \\ 5+12 > 2a+1 \rightarrow 14 > 2a \rightarrow a < 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{استدلال}} 3 < a < 7$$



تمرین [صفحه ۲۷ کتاب]:

۱- می‌دانیم که از یک نقطه خارج از یک خط، فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.
 L و L' موازی اند و خط d ، خط L را در M قطع کرده است.
 نقیض حکم: خط d ، خط L را قطع نمی‌کند. پس d موازی L است.
 در نتیجه از نقطه M دو خط d و L موازی L' رسم شده است که غیر ممکن است.
 پس نقیض حکم نادرست بوده و درستی حکم اثبات می‌شود.

۲- با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ باشد، آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.
 خلاف فرض $AB = AC \rightarrow \hat{A} \hat{B} C \text{ متساوی الساقین} \rightarrow \hat{B} = \hat{C}$ ؛ نقیض حکم
 پس نقیض حکم نادرست بوده و درستی حکم ثابت می‌شود.

۳- گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازه‌ی بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه‌ی کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

نادرست - مثلث با زوایای 150° ، 20° و 10° در نقطه بگیری.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

نادرست - در مثلث قائم الزاویه، از بین ۳ ارتفاع، دو تا از آن‌ها با دو ضلع مثلث پراپرنده.

۴- با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $(n-2) \times 180^\circ$.
 هر n ضلعی را با رسم قطرها به $(n-2)$ مثلث تقسیم کرد.
 چون مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است، لذا مجموع زوایای داخلی n ضلعی می‌شود $(n-2) \times 180^\circ$.

۵- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

(الف) هر لوزی یک مربع است.

لوزی ای وجود دارد که مربع نیست.

(ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

هر مستطیل یک مربع است.

(پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد.

وجود دارد مثلثی که بیش از یک زاویه قائمه دارد.

(ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر 360° است.

چهارضلعی محدبی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 340° نیست.

۶- عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه‌ی دو شرطی بنویسید.

(الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه‌ی روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

در هر مثلث، اگر دو زاویه برابر باشند، آن ضلع روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

دوسری: در هر مثلث، دو زاویه با هم برابرند، اگر و تنها اگر دو ضلع روبه‌رو به آنها با هم برابر باشند.

(ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمود منصف یکدیگرند.

اگر قطرهای یک چهارضلعی عمود منصف یکدیگر باشند، آن چهارضلعی لوزی است.

دوسری: یک چهارضلعی لوزی است اگر و تنها اگر قطرهایش عمود منصف یکدیگر باشند.

(پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

در هر مثلث، اگر سه زاویه با هم برابر باشند، آن ضلع سه ضلع برابرند.

دوسری: در هر مثلث، سه ضلع با هم برابرند اگر و تنها اگر سه زاویه برابر باشند.

(ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

اگر دو دایره مساحت‌های برابر داشته باشند، آن شعاع‌های برابر نیز دارند.

دوسری: دو دایره شعاع‌های برابر دارند اگر و تنها اگر مساحت‌های برابر داشته باشند.